PROYECTO DE LA REAL ACADEMIA
DE CIENCIAS

Estímulo del talento matemático

Prueba de selección
2 de junio de 2007

Nombre:…………………………………………………………..................................
Apellidos:……………………………………………………..................................
Fecha de nacimiento:…………………………………………...................................
Teléfonos:……………………………………………………….................................

Información importante que debes leer antes de comenzar a trabajar

En primer lugar debes mirar todos los ejercicios y después comenzar con los que te parezcan más sencillos.

No es necesario que trabajes las tareas en el orden en que se te presentan. Escoge tú mismo el orden que te parezca mejor.

Queremos conocer no solamente tus soluciones, sino sobre todo tus propios caminos hacia la solución.

Para ello te hemos propuesto los problemas cada uno en una hoja. El espacio libre lo puedes utilizar para tus observaciones y cálculos. Si este espacio no te basta utiliza por favor el reverso de la hoja y si aún te falta espacio utiliza otra hoja en blanco que nos puedes pedir (en la que debes señalar también el número que aparece en la esquina superior derecha de esta primera hoja). De ningún modo debes utilizar una hoja para cálculos y observaciones que se refieran a dos ejercicios distintos.
Al final nos debes entregar todos los papeles que hayas utilizado.

Nos interesa conocer las buenas ideas que se te ocurran en la solución de las tareas propuestas. Estas ideas, deberías tratar de describírnoslas de la manera más clara posible. Para ello nos bastarán unas breves indicaciones. También nos interesan las soluciones parciales de las tareas propuestas.

Además tenemos una curiosidad, **¿cómo te has enterado de esta convocatoria?**

- ❑ A través de tu colegio,
- ❑ A través del Concurso de Primavera,
- ❑ A través de otros medios.

Tienes dos horas en total. No deberías emplear demasiado tiempo para un mismo ejercicio. Consejo: máximo tiempo para un ejercicio 30 minutos.

.

Te deseamos mucho éxito.

1. EL JUEGO DE LAS PIEDRAS

Se trata de un juego para dos jugadores, Ana y Pedro. Para jugar sólo se necesitan unas cuantas piedras.

Las reglas son muy sencillas: Cada jugador, en su turno puede coger 1 o 2 piedras. Gana el jugador que retira la última piedra que, evidentemente, puede ir acompañada.

Se pide:

1. Si hay 5 piedras, encuentra un modo de jugar de Ana de manera que si es la primera jugadora en sacar piedras, esté segura de ganar.

2. Si hay 20 piedras, encuentra un modo de jugar de Ana de manera que si ella es la primera jugadora en sacar piedras, esté segura de ganar.

3. ¿Qué pasa si en el montón, al comenzar a jugar, hay veintiuna piedras? ¿Y si hay veintidós? ¿Y si, en general, hay un número cualquiera?

4. ¿Qué pasa si en el montón hay veinte piedras pero en vez de coger sólo una o dos, se pueden coger una, dos o tres?

Explica claramente todo lo que has visto.

2. LAS PARTIDAS

Tres amigos A, B y C acuerdan jugar un torneo de tres partidas de dados de forma que, cuando uno pierda, entregará a cada uno de los otros dos una cantidad igual a la que cada uno posea en ese momento. Se sabe además que cada uno perdió una partida en el orden siguiente: primero perdió el jugador A, luego lo hizo el jugador B y, finalmente, el jugador C.

Un ejemplo de cómo podría haberse desarrollado la partida se muestra en la siguiente tabla:

	Cantidad de euros del JUGADOR A	**Cantidad de euros del JUGADOR B**	**Cantidad de euros del JUGADOR C**
Inicio de la Partida	70	40	20
Después de que pierda el jugador A	10	80	40
Después de que pierda el jugador B	20	30	80
Después de que pierda el jugador C	40	60	30

a) Completa en la siguiente tabla las situaciones que se tendrían después de cada partida, en este otro supuesto de dinero inicial.

	Cantidad de euros del JUGADOR A	**Cantidad de euros del JUGADOR B**	**Cantidad de euros del JUGADOR C**
Inicio de la Partida	60	30	20
Después de que pierda el jugador A			
Después de que pierda el jugador B			
Después de que pierda el jugador C			

Con las mismas condiciones de orden de pérdida de cada partida responde a los siguientes apartados:

b) Se sabe que al final del torneo cada uno tenía 24 €, ¿cuánto dinero tenía cada jugador al comienzo?

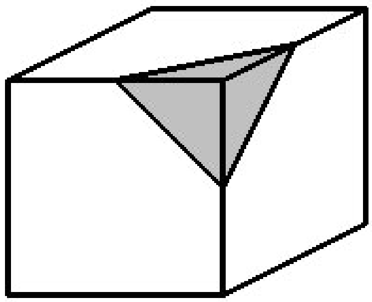
c) Se conoce que en otro torneo de las mismas características, el jugador C comenzó con 20 € y al final acabaron todos con la misma cantidad de dinero ¿cuánto tenía cada jugador al comienzo y con cuánto acabaron?

d) En otro torneo sucedió que se tuvo que suspender en la tercera partida ya que el jugador C no pudo hacer frente a los pagos correspondientes. Describe esta situación con un ejemplo.

e) Dicen que en una ocasión acabaron todos con la misma cantidad de dinero con la que comenzaron. ¿Es posible que se dé esta situación? Justifica la respuesta y, en caso afirmativo, pon un ejemplo que lo ilustre.

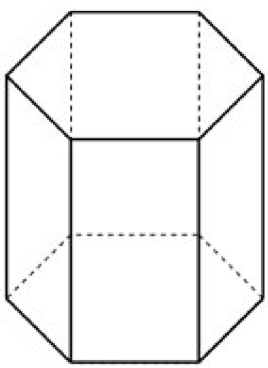
3. CUBO CORTADO

a) Uniendo los puntos medios de las aristas de un cubo como se ve en la figura, se obtienen pirámides triangulares. Si construimos una nueva figura geométrica sólida quitando estas pirámides, ¿cuántas, caras, vértices y aristas tiene el cuerpo resultante? Describe cómo has llegado al resultado.



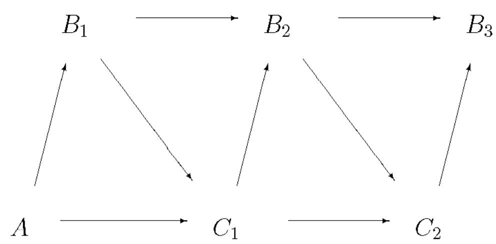
b) Ahora vamos a hacer una variación, sobre el problema anterior.
En vez de tomar los puntos medios, elegimos los puntos sobre las aristas y situados a un tercio de distancia de los vértices. Resultando, al unirlos, unas pirámides más pequeñas y que no se tocan entre ellas. Si recortamos estas pirámides, ¿cuántas, caras, vértices y aristas tiene la figura que resulta? Describe cómo has llegado al resultado.

c) Si en vez de un cubo, consideramos el prisma hexagonal regular de la figura (las bases son hexágonos regulares), y procedemos como en el apartado a) ¿cuántas, caras, vértices y aristas tiene el cuerpo resultante? Describe cómo has llegado al resultado.



4. CAMINOS

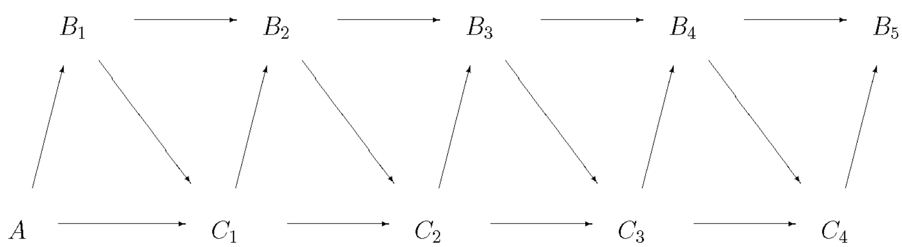
Se tiene la siguiente estructura:



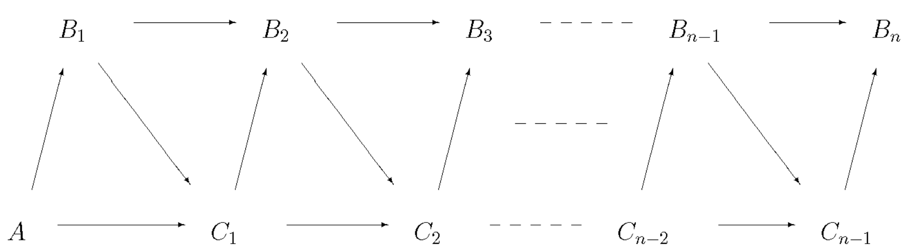
De un punto a otro se consideran los caminos siguiendo la dirección de las flechas. Observa que de A a B_1 hay un solo camino y que de a A a C_1 hay dos caminos.

1. ¿Cuántos caminos hay de A a B_2?
2. ¿Cuántos de A a B_3?

Incrementamos el número de flechas de la estructura hasta obtener la siguiente:

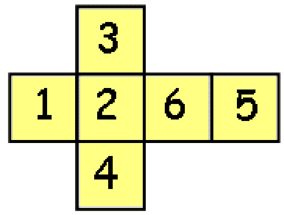


3. Desarrolla una estrategia que te permita calcular el número de caminos de A a cada uno de los puntos B_1, B_2, B_3, B_4 y B_5. ¿Cuántos caminos hay de A a B_5?
4. **4.** Extiende los resultados obtenidos a estructuras de este tipo con un número cualquiera de puntos. Indica una estrategia que te permita calcular el número de caminos desde el primer punto *A* al ultimo punto B_n.



5. DADOS GIGANTES

Tenemos ocho dados iguales con las caras numeradas de 1 a 6. Cada uno de los dados tiene el desarrollo plano siguiente:



Con los ocho dados construimos un cubo, que llamaremos “Gran Dado”

a) Si sumamos todos los números que vemos en las seis caras del “Gran Dado”, ¿cuál es la suma más grande que se puede obtener?
b) En el dado pintado, la suma de los puntos de dos caras opuestas es siempre la misma. ¿Podemos construir un “Gran Dado” de manera que si miramos dos caras opuestas la suma de todos los puntos que hay en esas caras siempre es la misma? Describe como has llegado al resultado.
c) ¿Podemos construir un “Gran Dado” de forma que la suma de los puntos que hay en cada una de sus seis caras sean los números consecutivos 19, 20, 21, 22, 23 y 24? Razona tu respuesta

Ahora tenemos veintisiete dados iguales con las caras numeradas de 1 a 6. Con los veintisiete dados construimos un cubo más grande que el anterior, le llamaremos “Mega Dado”

d) Si sumamos todos los números que vemos en las seis caras del “Mega Dado”, cuál es la suma más grande que se puede obtener.

6. RECTÁNGULOS.

En la cuadrícula de la página siguiente dibuja un cuadrado de 8 x 8 (es decir de 8 unidades de lado). En la misma cuadrícula dibuja aparte cuatro rectángulos de 3 x 5.

a) Razona dibujando, cómo podrías cubrir parte del cuadrado de 8 x 8 con los 4 rectángulos, sin que se superpongan y sin necesidad de trocearlos.
b) Busca todas las parejas de números naturales (a , b) que cumplan que a + b = 8 (como por ejemplo (3 , 5)) y en cada caso explica cómo puedes colocar los cuatro rectángulos de lado a y b sobre el cuadrado de 8 x 8, sin que se superpongan y sin necesidad de trocearlos.
c) Pensando en la zona que queda por cubrir en cada caso ¿puedes encontrar alguna característica que cumpla la suma de las áreas de los cuatro rectángulos respecto al área total del cuadrado de 8 x 8?
d) ¿Crees que se cumpliría la misma propiedad en el caso de un cuadrado de 9 x 9 y los cuatro rectángulos de lados que sumen 9?
e) Sin dibujarlos, explica con cuántas parejas diferentes de números naturales (a , b) que sumen 99 podrías colocar los cuatro rectángulos sobre un cuadrado de 99 x 99, sin que se superpongan y sin necesidad de trocearlos
f) Pon un ejemplo en el que se vea que no siempre es posible colocar cuatro rectángulos iguales sobre un cuadrado (sin que se superpongan y sin necesidad de trocearlos) aunque la suma de las áreas de los cuatro rectángulos sea menor que el área del cuadrado